



Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs

Wiskunde D HAVO

Domeinbeschrijving Toegepaste Analyse 2

Versie 2 (oktober 2006)

Voorwoord

Dit is een voorlopige domeinbeschrijving voor de module Toegepaste Analyse in Wiskunde D HAVO ten behoeve van de experimenten in 2006/2007.

De werkgroep bestaat uit: Jan Blankespoor, Peter van der Velden, Nelly Michon, Gert Treurniet

Inleiding

Bij Toegepaste analyse worden de zogenaamde standaardfuncties, hun belangrijkste eigenschappen en hun grafieken geanalyseerd. Vervolgens wordt in toepassingen gebruikgemaakt van deze analyse. Het voornaamste doel hierbij is voorbereiding op het vervolgonderwijs, waarbij met name wordt gedacht aan de beta-sector in het HBO. Concepten die worden gehanteerd om het gedrag van functies nader te analyseren, zoals de differentiaalrekening, komen bij Toegepaste analyse voor het eerst aan de orde. Verantwoording van de analyse van het gedrag van functies wordt gerealiseerd door de presentatie van contexten, waarin (meestal niet meer dan 2) variabelen aan elkaar gerelateerd zijn, een verschijnsel dat in de bètasector van het HBO centraal staat.

Toegepaste Analyse is geen nieuw domein. In wiskunde B1,2 nam het een belangrijke plaats in. Het betreft de domeinen E (Toegepaste Analyse 1) en H (Toegepaste Analyse 2). Toegepaste Analyse 2 is het logisch vervolg op Toegepaste Analyse 1. In de leerdoelen van wiskunde B per 1 augustus 2007 is van Toegepaste Analyse 2 door opgelegde reductie van de studielast een aanzienlijk deel geschrapt. Voor N&T-leerlingen, die doorgaans na hun HAVO-examen een vervolgstudie kiezen in de sector Techniek van het HBO is deze reductie ongewenst. Het is daarom logisch dat de geschrapte onderwerpen uit Toegepaste Analyse 2 in wiskunde-D terugkeren. Bij de ontwikkeling van Toegepaste Analyse 2, als domein van wiskunde-D is echter verder gekeken. Om de doelen van wiskunde-D in zijn algemeenheid te kunnen bereiken is gezocht naar stof, die ten opzichte van wiskunde B meer verdiepend en verbreedend is. Ook spelen uitdaging en zelfstandigheid daarbij een belangrijke rol. Niet alleen om de leerling beter voor te bereiden op een HBO-studie, ook om zijn motivatie verder te verhogen. Getracht is om de motivatie van de HAVO-leerling, die voor wiskunde-D heeft gekozen verder te verhogen door hem de gelegenheid te bieden niet alleen de grafische rekenmachine in te zetten, maar ook IT-hulpmiddelen waarmee hij, werkend aan een PC, routinematig werk efficiënter kan verrichten en waarmee hij de analysecapaciteit kan vergroten. Hierbij wordt onder andere gedacht aan de inzet van VUgrafiek, TI-Interactive (Binnenkort onder de naam Nspire) en EXCEL.



In de aangeboden lesstof zit een zekere overlap met wiskunde-B. Bij de beschrijving van de verschillende subdomeinen is aangegeven waar die overlap zit. Maar de ontwikkelde lesstof gaat wel wat dieper dan bij wiskunde B. Ook wordt meer dan bij wiskunde-B een beroep gedaan op de inzet van ICT-hulpmiddelen. Wat betreft de overlappende onderwerpen kan de docent de keuze maken om direct de diepte in te gaan met de lesstof voor wiskunde-D of eerst bij wiskunde B de lesstof meer oppervlakkig te behandelen en de wiskunde-D leerling later de verdieping zelf te laten doorgronden. Een aanzienlijk deel van de lesstof is wel een uitbreiding van wiskunde B. Bij de subdomeinbeschrijvingen wordt vermeld of het een verdieping en/of een uitbreiding t.o.v. wiskunde-B betreft. In de bij de subdomeinen behorende docenthandleiding is aangegeven hoeveel de studielast per hoofdstuk ongeveer is. Voor verdieping en uitbreiding t.o.v. de wiskunde-B stof is een studielast van 80 uur geraamd.

Globale domeinbeschrijving

Het domein Toegepaste Analyse 2 maakt deel uit van het programma wiskunde D voor HAVO en heeft een omvang van 80 sl. Deze studielast is, zoals hierboven is aangegeven, exclusief het ontwikkelde materiaal, dat ook tot de wiskunde-B stof gerekend moet worden. Bij gebruik van het ontwikkelde onderwijsmateriaal kan de docent besluiten de tot de wiskunde-B behorende stof over te slaan, of het materiaal deels bij wiskunde-B, deels bij wiskunde-D te gebruiken. In de domeinbeschrijving is aangegeven welke stof tot wiskunde-B gerekend moet worden, welke stof verdiepend is t.o.v. wiskunde-B, welke stof uit wiskunde-B bekend wordt verondersteld en welke stof exclusief tot wiskunde-D behoort.

Wiskundige concepten en/of activiteiten in dit domein zijn:

- het concept differentiëren, technieken en betekenis, inzicht in veranderingsprocessen en een groot aantal toepassingen
- de analyse van (samengestelde) goniometrische functies (inclusief de tangensfunctie) in relatie tot hun toepassingen
- het concept macht met exponent, exponentiële functies, hun eigenschappen en hun relatie met groei- en vervalprocessen
- het concept logaritme, logaritmische functies, hun toepassingen en hun relatie met exponentiële functies
- Het analyseren van modellen waarin variabelen via evenredigheidsverbanden aan elkaar gerelateerd zijn.

Het domein is opgebouwd uit de volgende subdomeinen:

1 Afgeleide functies (20 sl)

2 Periodieke Functies (20 sl)

3 Logaritmische en exponentiële functies (20 sl)

4 Het exploreren van evenredigheidsverbanden (20 sl)



1 Afgeleide functies (20 sl)

Het concept differentiëren, behandeld in wiskunde-B, wordt herhaald en verdiept. Met de techniek van het differentiëren wordt een vervolg gemaakt. Ook de tweede afgeleide en zijn betekenis komen aan bod. Toepassingen vanuit vele contexten zijn in de lesstof uitgewerkt en behoren tot de opgaven. Het gebruik van computeralgebrasoftware of VUgrafiek wordt gestimuleerd, maar niet als black box. De leerling dient zich volledig bewust te zijn van de impact van rekenregels, alvorens van IT-hulpmiddelen gebruik te maken. Deze kunnen worden ingezet ter controle en voor het routinematig handelen, waardoor een grotere efficiëntie bereikt wordt.

Leerdoelen: de leerling kan:

- In eigen woorden vertellen wat de betekenis is van de eerste en tweede afgeleide en kent de verschillende notaties hiervoor.
- Het verband aangeven tussen de afgeleide van $y = f(x)$ en de afgeleide van $y = f(x) + c$, $y = f(x + c)$, $y = c \cdot f(x)$ en $y = f(c \cdot x)$
- Voor het bepalen van de afgeleide functie de som-, verschil-, -produkt en quotiëntregel gebruiken
- De kettingregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van enkelvoudig samengestelde functies.
- In concrete gevallen binnen een context de afgeleide functie gebruiken bij het bepalen van een optimale situatie

Vergelijking met wiskunde B

Onderwerp	Wiskunde B	Wiskunde D
Meetkundige betekenis van differentiëren	E56 en E57	Samenvattend
Differentiequotiënt	E56	Bekend verondersteld
Differentiaalquotiënt	E56	Verdiepend
1 ^e graadsbenadering	E58	Bekend verondersteld
Verschillende notaties voor afgeleide	E60	Herhalend
Bestuderen veranderingsgedrag	E59	Verdiepend
Afgeleide van een machtsfunctie	E62, E94	Herhalend
Afgeleide van $f(x)$, $f(cx)$, $f(x+c)$, enz	H94	Bekend verondersteld
Afgeleide van $\sin(x)$, $\cos(x)$	E94	Herhalend
Bepaling maximum/minimum	E61	Bekend verondersteld
Som/verschilregel	H96	Bekend verondersteld
Produktregel	H96	Verdiepend
Quotiëntregel		Nieuw
Kettingregel	H97	Verdiepend
Tweede afgeleide		Nieuw
Betekenis tweede afgeleide		Nieuw
Gebroken lineaire functies		Nieuw
Tangensfunctie		Nieuw
Toepassingen vanuit contexten	E63 en H98	Verdiepend
Inzet van IT	GRM	Nieuw



2 Periodieke Functies (20 slu)

De sinus- en cosinusfunctie komen vanaf 2007 (opnieuw) aan bod in wiskunde-B, maar wel summier. In dit subdomein van wiskunde-D wordt een verdieping nagestreefd. Ook wordt gebruikgemaakt van de afgeleide van de goniometrische functies bij de analyse van periodieke functies, vaak ook vanuit een bepaalde context. De tangens-functie wordt ingevoerd. De leerling zal vanuit contexten uit de signaalanalyse periodieke verschijnselen analyseren en doorgronden. Ook wordt van hem verwacht dat hij goniometrische functies kan optimaliseren met behulp van differentiaalrekening.

Leerdoelen:

De leerling kan

- goniometrische functies grafisch optellen in verband met het samenstellen van trillingen.
- gegeven formules gebruiken om bijvoorbeeld het effect van een dergelijke optelling te verklaren.
- de eigenschappen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ gebruiken bij het werken met goniometrische formules.
- de afgeleide bepalen van de functies $f(x) = \sin x$ en $f(x) = \cos x$
- optimaliseringsproblemen oplossen die aanleiding geven tot het gebruik van goniometrische functies.

Vergelijking met wiskunde B

Onderwerp	Wiskunde B	Wiskunde D
Eigenschappen noemen van $\sin(x)$, $\cos(x)$	E38	
Graden omrekenen naar radialen v.v.	E65	
Harmonische beweging als goniometrische functie	E66	
Schommeling en trend	E67	
Grafiek van $f(x)=a \sin(b(x+c)) + d$ en $f(x)=a \cos(b(x+c)) + d$	E68	
Vergelijkingen zoals $\sin(cx) = a$, $\cos(dx+e) = a$	E69	
Periodiciteit gebruiken bij het oplossen van gon. verg.'n	E70	
Bij een gegeven sinusoïde een functievoorschrift opstellen	E71	
Gebruik amplitude, evenwichtslijn, faseverschil, frequentie	E72	
Van periodiek verschijnsel naar gon. functie	E73	
Gon. functies grafisch optellen		Nieuw
Effect optelling verklaren		Nieuw
St. van Pythagoras (gon. voorstelling)		Nieuw
Tangensfunctie		Nieuw
Optimaliseren gon. functie m.b.v. afgeleide		Verdiepend
Inzet van IT		Nieuw



3 Logaritmische en exponentiële functies (20 slu)

Ook bij dit subdomein wordt verdieping nagestreefd ten opzichte van wiskunde-B. De betekenis van de rekenregels voor machten met exponenten worden voor verschillende soorten getallen inzichtelijk gemaakt. De grafieken van exponentiële functies en hun relatie met andere exponentiële functies worden behandeld. Exponentiële vergelijkingen worden opgelost, zowel met als zonder gebruik te maken van logaritmen. Groeiprocessen worden aan de hand van groeifactoren en groeipercentages met elkaar vergeleken. Vanuit verschillende contexten komen exponentiële en logaritmische functies te voorschijn.

Het begrip logaritme met haar eigenschappen wordt eveneens verdiept en uitgebreid. Ook komen de afgeleide van zowel logaritmische als exponentiële functies aan bod.

Leerdoelen:

De leerling kan

- de kenmerkende eigenschappen noemen van exponentiële en logaritmische functies met grondtal e .
- de eigenschappen $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruiken in relatie met grafieken van exponentiële functies.
- De eigenschappen ${}^s \log ab = {}^s \log a + {}^s \log b$ en ${}^s \log a^p = p \cdot {}^s \log a$.
- het getal e noemen in (minstens) twee decimalen.
- de kenmerkende eigenschappen noemen van (grafieken van) exponentiële en logaritmische functies met diverse grondtallen (onder andere grondtal e).
- de afgeleide bepalen van exponentiële en logaritmische functies
- de eigenschappen $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruiken in relatie met (grafieken van) exponentiële functies.
- De eigenschappen ${}^s \log ab = {}^s \log a + {}^s \log b$, ${}^s \log \frac{a}{b} = {}^s \log a - {}^s \log b$ en ${}^s \log a^p = p \cdot {}^s \log a$ toepassen in relatie met (grafieken van) logaritmische functies.
- De eigenschap ${}^s \log a = \frac{{}^p \log a}{{}^p \log g}$ toepassen bij het overgaan van grondtal g op grondtal q bij logaritmen.
- Onder andere met behulp van IT-hulpmiddelen
 - Logaritmische en exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden oplossen
 - De grafiek van logaritmische en exponentiële functies plotten en analyseren
 - Groeiprocessen (ook bij negatieve groei) onderzoeken
 - Grafieken met logaritmische schaalverdeling(en) plotten



Vergelijking met wiskunde B

Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs

Onderwerp	Wiskunde B	Wiskunde D
Machten en exponenten	Onderbouw	Verdiepend
Kenmerkende eigenschappen van exponentiële functies	E38	Herhalend
Kenmerkende eigenschappen van logaritmische functies	E38	Verdiepend
Definitie getal e		Nieuw
Exponentiële functies met grondtal e		Nieuw
Natuurlijke logaritme		Nieuw
Afgeleide van exponentiële functies		Nieuw
Afgeleide van logaritmische functies		Nieuw
Eigenschappen van oneigenlijke machten gebruiken	E106	Verdiepend
Eigenschappen van logaritmen gebruiken	E107	Bekend verondersteld
Groei- en vervalprocessen (contexten)	E39	Herhalend
Verschuiven en oprekken grafieken	E42	Herhalend
Inverse functie	E40	Herhalend
Logaritmische transformaties (naar een andere schaal)		Nieuw
Exp. vergelijkingen oplossen	E46	Verdiepend
Log. verg. 'n oplossen	E46	Herhalend
Omrekenen naar ander grondtal	E48	Herhalend
Inzet van IT	GRM	Nieuw



4 Het exploreren van evenredigheidsverbanden (20 slu)

Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs

In veel praktijksituaties komen evenredigheidsverbanden voor van de vorm: $a = c \cdot b^d$. Daarin zijn a en b grootheden die in een praktische situatie een rol spelen, terwijl c de (constante) evenredigheidsfactor is en d de (constante) exponent die in praktijksituaties soms wel maar vaak juist geen gehele positief getal is. De constante d kan daarbij ook negatief of gebroken zijn. In dit domein worden middelen aangereikt om dergelijke verbanden te onderzoeken met name om bij een tabel met twee ingangen (a en b) te onderzoeken wat de twee constanten (d en c) zijn. Hierbij wordt vanaf een zeker moment gebruikt gemaakt van dubbellogaritmische schalen.

Een machtsverband is al aan de orde geweest bij Wiskunde B (echter beperkt tot d is een positieve, gehele exponent). Het gebruik van gebroken en/of negatieve exponenten kan men verdiepend noemen. Het onderzoeken met dit model in praktijksituaties is verbredend en zeker vernieuwend te noemen in het wiskundeprogramma.

Leerdoelen:

De leerling kan

- werken met evenredigheden tussen twee grootheden a en b van de vorm: $a = c \cdot b^d$ waarin exponent een reëel getal is
- een evenredigheid vaststellen van twee grootheden a.d.h.v. een gegeven tabel
- uit zulke tabellen de evenredigheidsconstante bepalen
- tabellen van evenredige grootheden aanvullen
- de wetten van de schaalvergroting gebruiken
- evenredigheden onderzoeken m.b.v. tabellen van een praktijksituatie
- een machtsverband tekenen op papier met dubbel-logaritmische schalen (of zogenaamd 10-stapspapier)
- met gegevens van een praktijksituatie uit de natuur of uit de techniek een machtsverband bepalen
- een theoretisch machtsverband bepalen en vergelijken met praktijkgegevens

De meeste leerdoelen worden gerealiseerd vanuit de casuïstiek.

Vergelijking met wiskunde B

Onderwerp	Wiskunde B	Wiskunde D
Glijvlucht (recht evenredig)		Nieuw
Schaalvergroting (evenredig met macht n)		Nieuw
Licht en afstand (omgekeerd evenredig)		Nieuw
Geluid en afstand (uithaalregel)		Nieuw
Juist tot de horizon (evenredig met de wortel)		Nieuw
Logaritmische schalen		Nieuw
Planeten en machten (log. schalen)		Nieuw
Machten en log. schaal		Nieuw
Evenredigheden in theorie en praktijk		Nieuw
Inzet van IT (toekomstige optie)		Nieuw